Agata Monika Jagoda

Mathematik

für
Studenten der Agrar- und
Gartenbauwissenschaften

- Hintergrundwissen
- Aufgaben mit ausführlichen Lösungswegen
- Zusammenfassung

Foto: Schafe aus Neuseeland von Rudolf Hert, Schweiz

Coverbild: Graphische Lösung eines linearen Optimierungsproblems mit drei Ungleichungen und einer Zielfunktion

Layout: Agata M. Jagoda, www.mathe-agrar.de
und Norbert Honkisch, www.honkisch.de

Druck: www.chroma.de

ISBN 3-938551-09-7

Vorwort

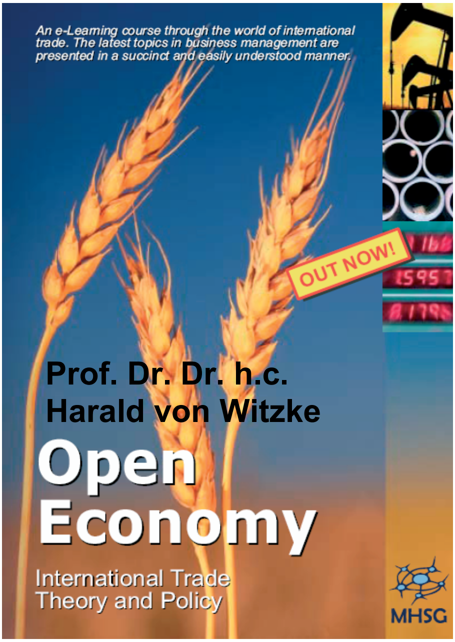
Wie in vielen anderen Disziplinen sind auch im agrarwissenschaftlichen Studium solide Mathematikkenntnisse notwendig. Studierende der Agrarwissenschaften beginnen ihre akademische Ausbildung indes manchmal mit etwas romantischen Vorstellungen der naturwissenschaftlichen Fundamente dieser akademischen Disziplin. So sind die Studierenden oft überrascht und bisweilen auch erschreckt über den Umfang dessen, was an mathematischem Rüstzeug für ein erfolgreiches Studium notwendig ist.

Frau Agata Monika Jagoda hat mit diesem Buch den erfolgreichen Versuch unternommen, die mathematischen Grundlagen, die den Studierenden der Agrarwissenschaften den Einstieg in ihr Studium erlauben, in einer Weise zu präsentieren, die den Erwerb des mathematischen Rüstzeugs besonders auch all derjenigen erleichtern sollte, die sich mit Schrecken an ihren gymnasialen Mathematikunterricht erinnern und für die die Mathematik eine nur schwer zu überwindende erste Hürde zum Einstieg in das Studium der Agrarwissenschaften darstellt.

Thematisch werden alle für den Beginn des Studiums erforderlichen mathematischen Themenbereiche besprochen, von elementarer Mengenlehre und Rechenregeln über Differential- und Integralrechnung bis hin zur linearen Algebra ist die Darstellung gerade auch für diejenigen, die mit der Mathematik schon in der Schule auf Kriegsfuß standen, klar und nachvollziehbar.
So manche Studierende werden es nach dem Studium dieses Buches unverständlich finden, warum sie sich bisher immer nur mit Angst und Schrecken mathematischen Problemen nähern konnten. Dies gilt auch deshalb, weil die Inhalte des Buches anhand von Beispielen Schritt für Schritt erläutert und durchgerechnet werden.

Prof. Dr. Dr. h.c. Harald von Witzke

e-Learning/e-Teaching



CD-ROM
ISBN 3-937242-05-5

Content:
What is international trade? Production cost and consumer preferences differ among different countries.

Learn what is needed to comply with the varying settings that can be found in our modern world. In this course, we look at international trade and trade policy.
What we can observe in the real world is that the world trade has grown at a very rapid pace and that classical trade models fail to apply to the information age. Take a look not only at neoclassical theories but also at new trade economics and monetary trade theory!
Learn what is needed to understand the complex system of international trade flows and capital movements.

Author:
Prof. Dr. Dr. h.c. Harald von Witzke teaches international Trade and Economic Development in the College of Agriculture and Horticultural Sciences at Humboldt University of Berlin. Some of his work can be found on the web at: http://www.agrar.hu-berlin.de/

Danksagung

Die wichtigsten Menschen, bei denen ich mich bedanken möchte, sind alle Studenten aus meinen Tutorien (2003 – 2005), die mich auf die Idee gebracht haben, dieses Buch zu schreiben.

Eine besondere Rolle kommt ferner dem Mathematiklehrer Marten Bech zu, der mich beraten hat.

Dr. Kurt Jechlitschka verdanke ich die elementare Basistransformation und den Simplexalgorithmus, Professor Harald von Witzke und Professor Dieter Kirschke meine ökonomische Ausbildung.

Bei Elżbieta und Norbert Schwarz, Maya Jagoda und Heinrich Jagoda bedanke ich mich für Geduld, Verständnis und Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\in$ ($\notin$)	ist (kein) Element
$\{x \in R \vert \ldots\}$	geschweifte Mengenklammer
$\emptyset, \{\ \}$	leere Menge
$[a,b]$ und $]a,b[$	geschlossenes und offenes Intervall
$<$; $\leq$	größer; größer oder gleich
$>$; $\geq$	kleiner; kleiner oder gleich
N	natürliche Zahlen
Z	ganze Zahlen
Q	rationale Zahlen
R	reelle Zahlen
$\mathbf{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathbf{R}^-$	negative reelle Zahlen
$\subset$	Teilmenge von
$\cap$, $\cup$	Durchschnitt, Vereinigung von
$\setminus$	Differenzmenge
$\times$	Paarmenge
$\neq$	ungleich
$\sum$	Summe
$x \mapsto f(x)$	Zuordnungsvorschrift
$y = f(x)$	Funktion mit einer unabhängigen Variable
D(f)	Definitionsbereich einer Funktion f
W(f)	Wertebereich einer Funktion f
B(f)	Bildbereich einer Funktion f
$x = g(y)$ oder f^{-1}	Umkehrfunktion von $y = f(x)$ oder Inverse einer Funktion
$\vert x \vert$	der Betrag einer Zahl x
∞	unendlich
$\pm$	plus bzw. minus
e^x	Exponentialfunktion, $e = 2{,}718\ldots$

$ln(x)$	Logarithmusfunktion
$\lim f(x)$	Grenzwert einer Funktion
$x \to \infty$	x gegen unendlich
$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	Differenzenquotient
$f'(x) = \frac{df}{dx}$	1. Ableitung, Differentialquotient
$f^n(x)$	n-te Ableitung
$z = f(x,y)$	Funktion mit zwei unabhängigen Variablen
f_x , f_y	partielle Ableitung 1. Ordnung von $f(x,y)$
f_{xx} , f_{yy} , f_{xy}	partielle Ableitung 2. Ordnung von $f(x,y)$
$F(x)$	Stammfunktion
$\int f(x)dx$	Unbestimmtes Integral
$\int_a^b f(x)dx$	Bestimmtes Integral
$\vec{0}$	Nullvektor
$A_{(m \times n)}$	Typ einer Matrix
A^T	transponierte Matrix
A^{-1}	inverse Matrix
E	Einheitsmatrix
$(A \mid b)$	erweiterte Matrix
$r(A)$	Rang der Matrix A

Abkürzungen

AS	Austauschspalte	**LGS**	lineares Gleichungssystem
AZ	Austauschzeile	**ME**	Mengeneinheiten
BT	Basistransformation	**NB**	Nebenbedingung
BV	Basisvariable	**NBV**	Nichtbasisvariable
G	Gewinn	**p**	Preis
GE	Geldeinheiten	**PR**	Produktregel
ha	Hektar	**U**	Umsatz
K	Kosten	**z**	Zentralelement
KR	Konsumentenrente	**ZF**	Zielfunktion

Griechisches Alphabet

Α α	Alpha	Ν ν	Ny
Β β	Beta	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Gamma	Ο ο	Omicron
Δ δ	Delta	Π π	Pi
Ε ε	Epsilon	Ρ ρ	Rho
Ζ ζ	Zeta	Σ σ	Sigma
Η η	Eta	Τ τ	Tau
Θ θ	Theta	Υ υ	Ypsilon
Ι ι	Iota	Φ φ	Phi
Κ κ	Kappa	Χ χ	Chi
Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Psi
Μ μ	My	Ω ω	Omega

Teil 1 Einführung

1. Definitionen aus der Mengenlehre

Nicht ohne Grund fängt jedes Mathematiklehrbuch mit der Mengenlehre an. So langweilig wie sich die Definitionen hier anhören mögen, so wichtig ist ihre Bedeutung für den Begriff der Funktion, den wir im Kap. 3 kennen lernen werden.
Außerdem werden hier wichtige Abkürzungen und mathematische Schreibweisen eingeführt, die die Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen (s. Kap. 1.4) kurz und eindeutig beschreiben.

Menge
$M = \{x, y, z\}$

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von Objekten mit bestimmten Eigenschaften.

Gehört z.B. x zur Menge *M*, so schreibt man:

$x \in M$ (lies: *x* Element *M*).

Ist *x* kein Element von *M*, so schreibt man:

$x \notin M$.

Teilmenge
$A \subset M$

Die Menge *A* ist Teilmenge von *M*, wenn jedes Element von *A* gleichzeitig ein Element von *M* ist.

Leere Menge
$\varnothing$ oder $\{\ \}$

Die leere Menge enthält kein Element und ist eine Teilmenge von jeder Menge.
Beachte, dass diese Menge keine Null beinhaltet!

1.1 Zahlenmengen

Es ist auch für Nichtmathematiker von Vorteil zu wissen, dass außer den Natürlichen Zahlen, die aus dem Bedürfnis entstanden sind, Gegenstände zu zählen, noch weitere existieren:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Menge der natürlichen Zahlen
Die Punkte deuten die Unendlichkeit der positiven ganzen Zahlen an.

$\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$

Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

$\mathbf{Z} = \{\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots\}$

Menge der ganzen Zahlen
Sie erweitert **N** um die negativen Zahlen und ermöglicht uneingeschränkte Subtraktion.

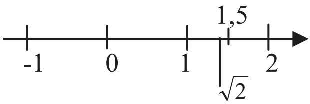
z.B.: 1 – 3 = -2

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

Menge der rationalen Zahlen
Dazu gehört jede Zahl, die ein **Bruch** (Division) **zweier ganzer Zahlen** *m* und *n* ist. Der Nenner *n* darf nicht Null sein. Diese Zahlen lassen sich auch als endliche oder periodisch unendliche **Dezimalbrüche** darstellen.

z.B.: $\frac{1}{2} = 0{,}5$
$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$

R



Menge der reellen Zahlen
Sie setzt sich **aus den rationalen und irrationalen Zahlen** zusammen.
Die reellen Zahlen bedecken lückenlos den Zahlenstrahl.

$\mathbf{R^+}, \mathbf{R^-}$

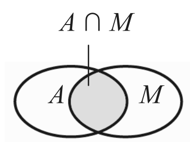
R kann unterteilt werden in die Menge der positiven und negativen reellen Zahlen.

Offensichtlich gilt: $N \subset Z \subset Q \subset R$
Die **irrationalen Zahlen** sind unendliche nichtperiodische Zahlen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen wie z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π und e.

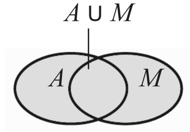
1.2 Verknüpfungen mit Mengen

Die Venn-Diagramme stellen die Verknüpfungen mit Mengen grafisch dar. Vor allem sollte man sich den Durchschnitt für die spätere Lösung von Ungleichungen merken.

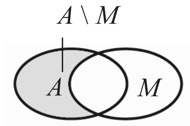
Durchschnitt $A \cap M$
(lies: *A* geschnitten *M*)
Menge aller Elemente, die sowohl zu *A* als auch zu *M* gehören.



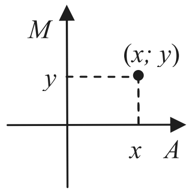
Vereinigung $A \cup M$
(lies: A vereinigt M)
Menge aller Elemente, die zu A oder zu M gehören (oder zu beiden).



Differenzmenge $A \setminus M$
(lies: A ohne M)
Menge aller Elemente, die zu A aber nicht zu M gehören.



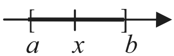
Paarmenge $A \times M$
(lies: A kreuz M)
Menge aller geordneten Paare $(x; y)$ mit der Eigenschaft $x \in A$ und $y \in M$. Ein geordnetes Zahlenpaar lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem eintragen. Trägt man $x \in A$ auf der Abszisse und $y \in M$ auf der Ordinate ab, dann lässt sich das Paar $(x; y)$ als Schnittpunkt der Achsenparallelen darstellen.



1.3 Intervalle

Intervalle sind **lückenlose Teilstrecken** des reellen Zahlenstrahls und Teilmengen der reellen Zahlen.

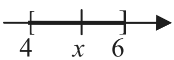
1. Abgeschlossenes Intervall



Die Randpunkte $a, b \in R$ gehören zum Intervall. Man schreibt:

$$[a,b] := \{x \in R \mid a \le x \le b\}$$

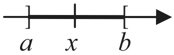
Beispiel 1:



$$[4,6] := \{x \in R \mid 4 \le x \le 6\}$$

„x ist ein Element der reellen Zahlen, für das gilt: x ist größer gleich 4 und kleiner gleich 6.“

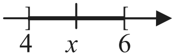
2. Offenes Intervall



Die Randpunkte gehören nicht zum Intervall

$$(a,b) := \{x \in R \mid a < x < b\}$$

Beispiel 2:



$$(4,6) := \{x \in R \mid 4 < x < 6\}$$

Hier gehört die 5,998 noch zum Intervall, aber nicht die 6.

Nach außen eckige]*a, b*[und runde (*a,b*) Klammern symbolisieren das offene Intervall. Es existieren auch halboffene Intervalle.
Für die Angaben von Definitions- und Wertebereichen einer Funktion wird die **Intervallschreibweise** benötigt (s. Kap. 3.3). Die **Lösungsmengen** von Gleichungen und Ungleichungen (Kap. 3.5) werden durch die geschweiften Klammern oder auf dem Zahlenstrahl dargestellt.

1.4 Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen

1. Gleichung mit **genau einer Lösung** **Beispiel 1:** $x - 2 = 4$ $x = 6$ $L = \{6\}$	2. Gleichung mit **mehreren Lösungen** **Beispiel 2:** $x^2 = 25$ $x = \sqrt{25}$ $L = \{-5;5\}$
3. Ungleichung mit **unendlich vielen Lösungen** **Beispiel 3:** $x^2 < 49$ $L = \{x \in R \mid -7 < x < 7\}$ Für diese Ungleichung nimmt x alle reellen Zahlen an, die größer -7 und kleiner 7 sind.	4. Gleichung mit **keiner Lösung** **Beispiel 4:** $x^2 + 1 = 0$ $L = \{\ \}$ Diese Gleichung hat keine Lösung in R.

Setzt man die **Elemente der Lösungsmenge L** in die Aussageform ein, so führt das zu einer **wahren Aussage** der Gleichung oder Ungleichung.

1.5 Elementare Rechenregeln mit reellen Zahlen

Ich nehme an, dass der Leser mit Alltagsmathematik vertraut ist. Deshalb werden nur Rechenregeln wiederholt, die man vergisst, weil sie im täglichen Leben in der Regel nicht benutzt werden.
Fangen wir mit der **Reihenfolge der Rechenoperationen** mit reellen Zahlen an:

Klammern vor Potenz vor Punkt vor Strich

Die binomischen[1] Formeln erleichtern das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und vereinfachen oft den Lösungsweg.
Oft wird in der Literatur auf das Produktzeichen zwischen zwei Termen verzichtet.

Es gelten die folgenden Regeln:

Rechnen mit negativen Zahlen
$-(-a) = a$
$-ab = (-a)\cdot b = a\cdot(-b)$
$(-a)\cdot(-b) = ab$
$(-a)(b + c) = -ab - ac$

Binomische Formeln
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Seit es Taschenrechner gibt, ist das **Rechnen mit Brüchen** als solche bei Studenten unbeliebt geworden. Umso beliebter ist es bei Professoren und in Matheklausuren, wo manchmal ausdrücklich eine Lösung in Bruchform verlangt wird. Die allgemeinen Formeln mit Bespielen helfen sicherlich, das alte Schulwissen zu erfrischen:

[1] Ein Binom (lateinisch: *bi* – zwei und *nomen* – Name) ist eine eingeklammerte Summe oder Differenz von Variablen oder Zahlen.

Bruchrechnung	$(a, b, c, d \in R)$	**Beispiele**
Addition, Subtraktion Gleiche Nenner	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ $\frac{2x^3+x}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 2x + \frac{1}{x}$
Addition, Subtraktion Unterschiedliche Nenner	$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d}$	$\frac{3}{7} - \frac{5}{2} = \frac{6}{14} - \frac{35}{14} = -\frac{29}{14}$
Multiplikation	$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$
Division	$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$	$\frac{3}{7} : \frac{5}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$

Die folgenden **Potenzgesetze** werden später für das Lösen von Potenzgleichungen und für die Nullstellenberechnung von Polynomen (Kapitel 3.7.1) benötigt.
Man nennt ***a*** die **Basis** und ***n*** **den Exponenten von** ***a***.

Potenzgesetze $(a \geq 0; n, m \in N)$	**Beispiele**
$a^0 = 1$	$4^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-2} = \frac{1}{4^2}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$4^3 \cdot 4^6 = 4^9$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$4^3 : 4^6 = 4^{-3} = \frac{1}{4^3}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^6)^3 = 4^{18}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (lies: n-te Wurzel aus a)	$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0; n \in N, m \in Z)$	$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

Wegen des Potenzgesetzes $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ lassen sich alle **Wurzelgesetze** mit Potenzen darstellen.

Wurzelgesetze $(a, b \geq 0; n, m \in N)$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} = (a : b)^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$

Spätestens wenn man in der Klausur eine Funktion wie

$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2x}}}$ ableiten soll, freut man sich über den Gebrauch von Potenzgesetzen.

In der Tat sieht die Umformung $f(x) = \left((2x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (2x)^{-\frac{1}{6}}$ viel ungefährlicher aus als der Term mit der Wurzel. Mehr Beispiele, die das Leben erleichtern, finden sich im Kap. 4.4.

2. Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ (Sigma aus dem griechischen Alphabet) mit einem Laufindex **kürzt** im Wesentlichen **eine Summe** mit einer großen Anzahl von Summanden ab. Damit spart man sich viel Schreibarbeit.

Bezeichnungen am Summenzeichen

Beispiel:	Dabei ist
$\sum_{i=1}^{18} a_i$	a: Summationsvariable i : Laufindex nimmt hier die Werte von 1 bis 18 nacheinander an 1: untere Summationsgrenze 18: obere Summationsgrenze

Die Wahl für die Bezeichnung des Laufindex, auch Summationsindex genannt, ist nicht von Bedeutung. Gewöhnlich werden dafür die verschieden Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiel 1:
Die Summe

$$S = 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+ \\ +26+28+30+32+34+36$$

soll unter Verwendung des Summenzeichens geschrieben werden.
Jeder Summand ist hier durch 2 teilbar und man kann die Summe auch als $S = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 18$ schreiben. Da die 2 immer auftaucht, ist sie eine Konstante in dieser Summe. Der Summationsindex dieser Summe, nennen wir ihn *i*, nimmt die Werte von 1 bis 18 an.

Wir schreiben dann verkürzt: $S = \sum_{i=1}^{18} 2i$.

Man kann den konstanten Faktor 2 auch vor das Summenzeichen ziehen:

$$S = 2\cdot \sum_{i=1}^{18} i \, .$$

Oft wird das Ergebnis einer Summe gesucht, wobei nur die abgekürzte Summenform gegeben ist. Ziel ist, die Summe mit Summanden darzustellen und zu berechnen.

Beispiel 2:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

für i=1 i=2 ... i=5

In diesem Beispiel setzt man für den Laufindex *i* die Zahlen 1 (untere Summations-Grenze) bis 5 (obere Summations-Grenze) nacheinander ein und addiert sie zusammen. Das Endergebnis ist 15.

Beispiel 3:

$$\sum_{k=0}^{3} 4^k = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3$$

Da der Laufindex k in der Potenz steht, variiert nun die Potenz der Zahl 4 von 0 bis 3. Die gesamte Summe ergibt 85.

Beispiel 4:

$$\sum_{i=1}^{5} 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 5 = 30$$

Wie man hier erkennen kann, fehlt der Laufindex i an der Zahl 6 (der Summationsvariable).
In diesem Fall multipliziert man die Summationsvariable mit der Zahl 5. Die Fünf ist aber nicht die Obergrenze, da auch manche Summen nicht unbedingt von der Untergrenze 1 anfangen. Sie berechnet sich nach der allgemeinen Formel:

Summationsvariable · (Obergrenze – Untergrenze + 1)

Hier : $6 \cdot (5 - 1 + 1) = 6 \cdot 5$

Bei **Doppelsummen** ist die Summationsvariable (der Ausdruck nach dem Summenzeichen) selbst eine Summe. Bei der Berechnung einer solchen Doppelsumme bleibt der erste Laufindex fest und der zweite variiert. Die Reihenfolge der Summenzeichen ist vertauschbar:

Beispiel 5:
Die Einzelsumme

$$\sum_{n=1}^{2} n^2 + n^3 + n^4 \underset{n=1}{=} 1^2 + 1^3 + 1^4 \underset{n=2}{+} 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$$

lässt sich verkürzter durch die Doppelsumme $\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=2}^{4} n^k$ darstellen. Hier hat man die einzelnen Potenzen von n als Laufindex k (k = 2 bis 4) zusammengefasst.

k variiert von 2 bis 4

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=2}^{4} n^k \underset{n=1}{=} 1^2 + 1^3 + 1^4 \underset{n=2}{+} 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$$

Für die Berechnung der Doppelsumme bleibt die 1 (n = 1) bei den ersten drei Summanden fest und nur die Potenz k variiert von 2 bis 4. Als nächstes bleibt n = 2 fest und die Potenz k nimmt wieder die Werte von 2 bis 4 an.

Beispiel 6:

$$\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=2}^{4} 2n \cdot (2+k) \underset{(n=1)}{=} 2 \cdot 1 \cdot (2+2) + 2 \cdot 1 \cdot (2+3) + 2 \cdot 1 \cdot (2+4) +$$

$$\underset{(n=2)}{+} 2 \cdot 2 \cdot (2+2) + 2 \cdot 2 \cdot (2+3) + 2 \cdot 2 \cdot (2+4) = 90$$

Für n setzen wir die Zahlen von 1 bis 2 ein und k variiert von 2 bis 4.
In der ersten Zeile dieser Summe bleibt der erste Laufindex n immer 1, wobei der Index k in den Klammern von 2 bis 4 variiert. In der zweiten Zeile wird die 2 immer mit 2 multipliziert (n = 2) und k variiert wieder von 2 bis 4.
