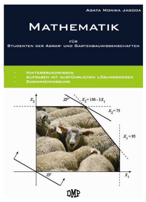
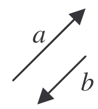


„MATHEMATIK FÜR STUDENTEN DER AGRAR- UND GARTENBAUWISSENSCHAFTEN“ VON A. M. JAGODA,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.3
Seite 96-98

7.3 Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Wie bereits angesprochen, sind Vektoren gerichtet.
Zwei Vektoren, die die **gleiche Richtung** haben, also kollinear sind, heißen **linear abhängig**.

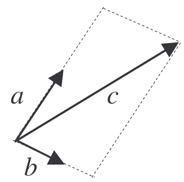


Definition

Eine Menge von Vektoren heißt linear abhängig, wenn sich mindestens ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Im R^2 gilt: Zwei Vektoren a und b heißen linear abhängig, wenn es einen Faktor $\lambda \neq 0$ gibt, so dass $b = \lambda a$ ist. Wenn sich einer der Vektoren als Vielfaches des anderen darstellen lässt, dann spricht man von linearer Abhängigkeit.

Drei Vektoren *a*, *b* und *c* sind **linear abhängig**, **wenn** einer von ihnen, beispielsweise ***c*, in der von *a* und *b* aufgespannten Ebene liegt**.



Wie löst man das Problem der linearen Abhängigkeit rechnerisch?

Angenommen, c liegt in der von a und b aufgespannten Ebene. Dann kann c als Linearkombination von a und b dargestellt werden.

$$\boldsymbol{c} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}$$

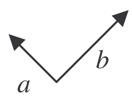
In der Regel ist vorher nicht bekannt, welcher von den Vektoren sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Deshalb wird eine **allgemeine Gleichung** eingeführt, deren Lösungsmenge zu bestimmen ist.

$$\boxed{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \vec{0} \ \ (Nullvektor)}$$

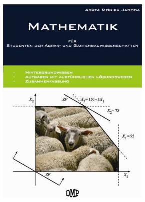
(λ_1, λ_2 und λ_3 sind die Unbekannten)

Gibt es für die Gleichung eine andere Lösung als die Null (also $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0}$), so sind die Vektoren ***a*, *b*, *c* linear abhängig**. Ist also auch nur ein $\lambda \neq 0$, so sind die Vektoren a, b, c linear abhängig.

Zwei linear unabhängige Vektoren a und b **spannen eine Ebene auf**, müssen aber nicht senkrecht aufeinander stehen.
Es gilt dann $b \neq \lambda a$.



Für Vektoren aus R^3 oder höher (R^n) erfolgt die Entscheidung über die lineare Unabhängigkeit ebenfalls anhand der Lösungsmenge der Gleichung.



„MATHEMATIK FÜR STUDENTEN DER AGRAR- UND GARTENBAUWISSENSCHAFTEN“ VON A. M. JAGODA,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.3
Seite 96-98

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \vec{0} \ \ (Nullvektor)$$

Gibt es für die allgemeine Gleichung nur die Null als Lösung (**$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$**), so sind die Vektoren ***a, b, c*** **linear unabhängig**.

Mehr als n Vektoren im n-dimensionalen Raum R^n sind immer linear abhängig!

Zum Beispiel sind drei Vektoren aus dem zweidimensionalen Raum R^2 immer linear abhängig (s. Bsp. 2 in diesem Kapitel und Bsp. 3 aus Kap. 7.5).

Beispiel 1:

Gegeben sind zwei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ im R^2, die auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit untersucht werden sollen.

Man erkennt bereits, dass sich der Vektor *b* offensichtlich als Linearkombination von *3a* darstellen lässt.

Es gilt: $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3a$

Beispiel 2:

Gegeben seien die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für welche λ_1 und λ_2 ist der Vektor a_3 eine Linearkombination der Vektoren a_1 und a_2?

$$\boldsymbol{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_3}$$

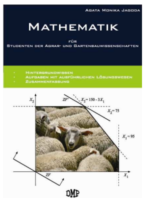
Die Lösung wird mit Hilfe eines **Gleichungssystems** ermittelt:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei werden die Variablen λ_1 und λ_2 mit den Vektoren a_1 und a_2 multipliziert, das Ergebnis sind zwei Gleichungen I und II mit je zwei Unbekannten λ_1 und λ_2.

I. $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 4$
II. $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$ / II -2I (Die Gleichung I mit 2 multiplizieren und von Gleichung II abziehen.)

Der Rechenschritt (II-2I) schaut so aus: $2\lambda_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - (-4\lambda_2) = 1 - 8$



„Mathematik für Studenten der Agrar- und Gartenbauwissenschaften“ von A. M. Jagoda,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.3
Seite 96-98

$$\rightarrow 7\lambda_2 = -7 \quad /:7$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}$$ Diese Lösung wird in die Gleichung I eingesetzt.

λ_2 in I: $\lambda_1 + 2 = 4 \quad$ /-2

$$\underline{\lambda_1 = 2}$$

Probe: $2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$$2a_1 + (-1)a_2 = a_3$$

Der Vektor a_3 lässt sich als Linearkombination von a_1 und a_2 darstellen.

Da nunmehr zwei λ eine von 0 verschiedene Lösung haben ($\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$), sind die drei Vektoren linear abhängig.