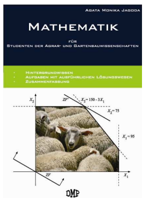


„MATHEMATIK FÜR STUDENTEN DER AGRAR- UND GARTENBAUWISSENSCHAFTEN“ VON A. M. JAGODA,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.5
Seite 105-109

7.5 Elementare Basistransformation

Der **Übergang von einer gegebenen Basis zu einer neuen Basis heißt Basistransformation**. Die neue Basis muss sich wenigstens um einen Vektor von der alten Basis unterscheiden.

Beim Lösen eines Gleichungssystems (s. Kap. 7.3 und 7.4), welches bei der Überprüfung von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit entsteht, muss bei jeder Zeilenumformung überlegt werden, womit die Gleichungen multipliziert und addiert werden müssen, um eine bestimmte Variable, z.B.: λ_1 zu eliminieren. Einfacher ist es, die Schritte zur Lösung zu standardisieren, d.h., ein bestimmtes Rechenschema für alle Aufgaben zu verwenden.

Die **elementare Basistransformation** ist ein **tabellarisches Rechenverfahren**. Mit diesem Algorithmus lassen sich

- Vektoren auf lineare Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit überprüfen und
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen finden (Kap. 9).

Bei diesem Rechenverfahren werden die Vektoren der gegebenen Basis gegen die Vektoren der potenziellen neuen Basis ausgetauscht. Die beteiligten Vektoren werden in einer Tabelle angeordnet und nach bestimmten Rechenschritten ausgetauscht.
Die Einheitsvektoren bilden in allen aufgeführten Beispielen die gegebene Basis. Die Koordinaten der Einheitsvektoren werden für die Tabelle und den Tauschvorgang nicht benötigt. Die einzelnen Schritte der elementaren Basistransformation sollen anhand des folgenden Beispiels erklärt werden.

Beispiel 1: Bilden die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis im R^2?

Die Einheitsvektoren e_1 und e_2 bilden die Basis für a_1 und a_2. Um zu überprüfen, ob a_1 und a_2 eine Basis für e_1 und e_2 bilden, werden die Vektoren a_1 und a_2 mittels der elementaren Basistransformation auf lineare Unabhängigkeit überprüft. Die zu untersuchenden Vektoren werden spaltenweise in eine Tabelle eingetragen.

Ia

$$\begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 2 & 3 \end{array}$$

Auf der linken Seite werden die Einheitsvektoren e_1 und e_2 notiert und oben die **Vektoren a_1 und a_2**. Das Ziel ist es, diese nach und nach auf die linke Seite zu überführen, sprich **mit e_1 und e_2 auszutauschen**.

Ib

$$\begin{array}{cc|cc} & & \text{AS} & \\ & & \downarrow & \\ & & a_1 & a_2 \\ \hline \text{AZ} \leftarrow & e_1 & 1 & -2 \\ & e_2 & 2 & 3 \end{array}$$

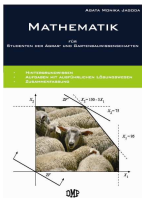
Jeder Austauschvorgang wird durch Pfeile verdeutlicht.
Zuerst wird das Zentralelement (z-Element) bestimmt.
Das **z-Element** ist eine Zahl aus der Tabelle, für die gilt: $\mathbf{z \neq 0}$.
Die Spalte, in der das z-Element steht, wird **Austauschspalte** (**AS**) genannt.
Die Zeile, in der das z-Element steht, wird **Austauschzeile** (**AZ**) genannt.

Ic

$$\begin{array}{cc|cc} & & \downarrow & \\ & & a_1 & a_2 \\ \hline \leftarrow & e_1 & 1 & -2 \\ & e_2 & 2 & 3 \end{array}$$

Der Vektor a_1 wird gegen e_1 ausgetauscht.
Dort, wo sich die Austauschspalte mit der Austauschzeile kreuzt, steht das **Zentralelement (z-Element),** hier die 1 **im Kreis**.

Was passiert nun mit dem z-Element und den übrigen Elementen beim Übergang zur nächsten Tabelle?
Diese werden nach vier Rechenregeln neu berechnet.



„MATHEMATIK FÜR STUDENTEN DER AGRAR- UND GARTENBAUWISSENSCHAFTEN“ VON A. M. JAGODA,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.5
Seite 105-109

1. Das z-Element, hier die 1, wird in der nächsten Tabelle zum Kehrwert $\frac{1}{z}$.
2. Die -2 aus der Austauschzeile wird mit $\frac{1}{z}$ multipliziert.
3. Die 2 aus der Austauschspalte wird mit $-\frac{1}{z}$ multipliziert.
4. Die 3, die weder zur AS noch zur AZ gehört, wird zu einem neuen Element c_{neu}, welches nach der **Rechteckregel**
   $c_{neu} = c_{alt} - \frac{a \cdot b}{z}$ berechnet wird.

Aus $c_{alt} = 3$ (Position: zweite Spalte und zweite Zeile) wird

$c_{neu} = 3 - \frac{-2 \cdot 2}{1} = 7$

Nebenrechnung

	a_1	a_2
e_1	$z = 1$	$a = -2$
e_2	$b = 2$	$c_{alt} = 3$

Die Ergebnisse der vier Rechenschritte werden in die Tabelle II eingetragen.

IIa

	e_1	a_2
a_1	1	-2
e_2	-2	7

Der nächste Schritt ist der Austausch von a_2 gegen e_2.

IIb

	e_1	a_2 ↓
a_1	1	-2
← e_2	-2	7

In der Tabelle II ist die 7 das z-Element.
Gemäß den vier Rechenregeln werden die Elemente der Tabelle II beim Austausch des Vektors neu berechnet.

1. Das z-Element, hier die 7, wird in der nächsten Tabelle zum Kehrwert $\frac{1}{z} = \frac{1}{7}$.
2. Die -2 aus der Austauschzeile wird mit $\frac{1}{7}$ multipliziert.
3. Die -2 aus der Austauschspalte wird mit $-\frac{1}{7}$ multipliziert.
4. Die 1, die weder zur AS noch zur AZ gehört, wird zu einem neuen Element c_{neu}, welches nach der **Rechteckregel** berechnet wird.

Aus $c_{alt} = 1$ wird

$c_{neu} = 1 - \frac{(-2)\cdot(-2)}{7} = \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

Nebenrechnung

	a_1	a_2
e_1	$c_{alt} = 1$	$a = -2$
e_2	$b = -2$	$z = 7$

III Endtabelle

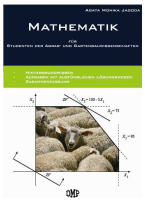
	e_1	e_2
a_1	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
a_2	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Die Tabelle III ist die letzte Tabelle der elementaren Basistransformation, weil die Vektoren $\boldsymbol{a_1}$ **und** $\boldsymbol{a_2}$ auf die linke Seite gebracht worden sind. Sie sind somit **linear unabhängig und bilden eine Basis im $\mathbf{R}^2$**.

Wenn alle Vektoren aus der Kopfzeile der Anfangstabelle I auf die linke Seite gebracht werden können, sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis. Falls bei einem noch anstehenden Austauschvorgang das Zentralelement gleich null ist (z = 0), endet das Rechenverfahren. Die zu untersuchenden Vektoren sind dann linear Abhängig und können keine Basis bilden.

Was stellen aber die Koeffizienten der Endtabelle dar?

Die Koeffizienten der letzten Tabelle sind **die Koordinaten von $\boldsymbol{e_1}$ und $\boldsymbol{e_2}$ bezüglich der neuen Basis bestehend aus $\boldsymbol{a_1}$ und $\boldsymbol{a_2}$.**



„Mathematik für Studenten der Agrar- und Gartenbauwissenschaften“ von A. M. Jagoda,

DMP, 2005, ISBN 3-938551-09-7
Kapitel 7.5
Seite 105-109

Basistransformation

Alte Basis (links in der Tabelle) bestehend aus den **Einheitsvektoren e_1 und e_2** I Anfangstabelle $\begin{array}{c\|cc} & a_1 & a_2 \\ \hline e_1 & 1 & -2 \\ e_2 & 2 & 3 \end{array}$	**Neue Basis** (links in der Tabelle) bestehend aus den linear unabhängigen Vektoren **a_1 und a_2** III Endtabelle $\begin{array}{c\|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline a_1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ a_2 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}$
Koordinaten von a_1 und a_2 bezüglich der Basisvektoren e_1 und e_2: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	**Koordinaten von e_1 und e_2** bezüglich der Basisvektoren a_1 und a_2: $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Aus Kap. 7.4 wissen wir, dass Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden können. Beispielsweise kann der Vektor **e_1 als Linearkombination der Vektoren a_1 und a_2** dargestellt werden ($e_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$).

Die λ-Werte der Linearkombination sind in der Endtabelle zu finden. Zur Überprüfung der λ-Werte empfiehlt es sich, die folgende Vektorgleichung zu berechnen:

$$e_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

$$e_1 = \tfrac{3}{7} a_1 + \left(-\tfrac{2}{7}\right) a_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{2}{7}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{7} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog dazu kann auch die Aussage der Gleichung $e_2 = \frac{2}{7} a_1 + \frac{1}{7} a_2$ überprüft werden.